

新型 $(2k, k, 1)$ 卷积码的构造

张承畅^{1,2}, 彭万权³, 韦铂²

(1. 重庆邮电大学 光电工程学院, 重庆 400065;

2. 重庆大学 通信与测控教育部重点实验室, 重庆 400030; 3. 重庆工程职业技术学院, 重庆 400037)

摘 要: 结合双环循环码和 $(2,1,1)$ 卷积码, 构造了一类 $(2k,k,1)$ 卷积码, 获得了一种短码构造长码的新方法。通过定义一种状态转移矩阵, 利用代数方法和格栅图, 揭示了该码类的构造机理, 发现其码字结构的均衡性与多样性俱佳, 具有良好的距离特性。仿真实验表明, $(2k,k,1)$ 卷积码的纠错性能和译码速度相较于传统卷积码存有一定优势。

关键词: 卷积码; 状态转移矩阵; 维特比译码

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2014)06-0200-07

Construction of a new class of $(2k, k, 1)$ convolutional codes

ZHANG Cheng-chang^{1,2}, PENG Wan-quan³, WEI Bo²

(1. College of Electroning Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China;

2. Laboratory of Aircraft Tracking Telemetry & Command and Communication,

Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400030, China;

3. Chongqing Vocational Institute of Engineering; Chongqing 400037, China)

Abstract: A new class of $(2k,k,1)$ convolutional codes are created by combining double cyclic codes and $(2,1,1)$ convolutional codes, and also a new method for creation long codes with short ones was proposed. The structural mechanism of the codes was revealed by defining a state transition matrix and using algebraic method as well as grille graph. This code structure was excellent in both proportionality and diversity, besides, the distance characteristics of it are also quite well. Simulation results show that, the $(2k,k,1)$ convolutional codes present some advantages over the traditional one in error correction performance and decoding speed.

Key words: convolutional codes; state transition matrix; viterbi decoding

1 引言

卷积码是一种带有记忆特性的纠错码类, 具有良好的纠错能力。早期的卷积码有适合于大数逻辑译码的正交卷积码^[1]、拥有快检能力的非系统卷积码—内快检码^[2], 以及由 2 个具有互补特性的子生成元构造的互补卷积码^[3]。20 世纪 80 年代, 凿孔卷积码、咬尾卷积码和网格编码调制得到广泛应用^[4]。20 世纪 90 年代, 一种反馈型卷积码—递归系统卷积码随 Turbo 码的发现而提出^[5]。近年来, 有学者

开始研究一种卷积 LDPC 码^[6-8], 该码类既具有 LDPC 分组码因置信传播迭代译码所带来的高性价比, 又具有卷积码因记忆特性所带来的性能优势, 已成为当前编码领域的研究热点之一。

(n,k,l) 卷积码要想获得好的性能, 需要有大的自由距离, 其除了依赖好的生成矩阵外, 还得增大记忆长度 kl , 增大编码约束长度 l 或信息组长度 k 均可实现这一点。目前, 更多的优质卷积码是依赖于约束长度 l 增加的, 这是因为随着计算机技术的发展, 通过枚举式搜索比借助代数理论更为便捷可行^[9],

收稿日期: 2013-01-08; 修回日期: 2014-03-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61263030); 重庆市科委自然科学基金资助项目(cstc2013jcyjA40055); 中央高校基本科研业务费基金资助项目(CDJZR12160018, CDJZR12160019)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China(61263030); The Natural Science Foundation of Chongqing (cstc2013jcyjA40055); The Fundamental Research Funds for the Central Universities(CDJZR12160018, CDJZR12160019)

而在这种试探性搜索的过程中，人们更愿意单方面思考约束长度 l 的增加给编码结构带来的变化。然而，理论分析指出，信息组长度 k 的增加不但能增大总的记忆长度，更为重要的是还能带来额外的性能增益^[10]，这一点是约束长度 l 所不具备的。虽然目前也有正交卷积码或凿孔卷积码等少量成功增加信息组长度 k 的例子，但其增幅是十分有限的，且往往会导致码率变大，距离特性变差。可见大 k 值卷积码的研究力度并不够，尚存有进一步的研究空间。

文献[11]通过代数解析，证明了(2,1, l)传统卷积码实质是由码长只有 2 的(2,1)偶校验码构造而得的长码，揭示了不同时刻码组之间信息共享的本质。本文以(2k, k)线性分组码替换(2,1)偶校验码，结合(2,1,1)卷积码的编码器结构，构造出一类具有大信息长度的(2k, k ,1)卷积码。之后，借助一种状态转移矩阵，对该码类的码字结构、构造机理和距离特性进行了详细的代数分析。实验部分完成了部分码型软判决 viterbi 矩阵译码的仿真，并从译码速度和纠错能力 2 个方面与(2,1, l)卷积码进行了比较。

2 基于矩阵运算的编码

以下按伽罗华域 $GF(2)$ 运算，设(2,1,1)卷积码的生成多项式矩阵为

$$G(D) = \begin{bmatrix} 1+D \\ D \end{bmatrix} \quad (1)$$

按该式构造出(2k, k ,1)卷积码的编码器，如图 1 所示， $\mathbf{M}(t)=[m_0(t) m_1(t) m_2(t) \cdots m_{k-1}(t)]^T$ 为 k 位二元信息矢量，矢量寄存器 D 同时对 k 位信息进行时间延时，得到 $\mathbf{M}(t-1)=[m_0(t-1) m_1(t-1) m_2(t-1) \cdots m_{k-1}(t-1)]^T$ ，设(2k, k)线性分组码的生成矩阵为

$$G = \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中， I 为单位阵， I 、 P 均为 $k \times k$ 矩阵，则线性分组码编码后得到

$$C_1^{ij} = G \times (\mathbf{M}(t) + \mathbf{M}(t-1)) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(t) + \mathbf{M}(t-1) \\ P(\mathbf{M}(t) + \mathbf{M}(t-1)) \end{bmatrix} \quad (3)$$

该过程的物理意义在于：前后时刻的信息元均参与到了编码，实现了记忆性。嵌零模块在当前信息矢量之前嵌入 k 个 0，形成 $2k \times 1$ 的输出矢量

$$C_2^{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}(t) \end{bmatrix}, \text{ 与式(3)叠加后输出}$$

$$C^{ij} = C_1^{ij} + C_2^{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(t) + \mathbf{M}(t-1) \\ P(\mathbf{M}(t) + \mathbf{M}(t-1)) + \mathbf{M}(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中， i 和 j 分别为 $\mathbf{M}(t)$ 和 $\mathbf{M}(t-1)$ 的十进制， $i, j = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1$ 。以上过程通过将线性分组码嵌入到卷积码的编码结构，实现二者的有机结合，因此称线性分组码为内嵌码。内嵌码的距离特性将直接影响(2k, k ,1)卷积码的纠错性能，这里从文献[10]引入一种具有最大最小距离的二进制(2k, k)双环循环线性分组码作为内嵌码，表 1 给出 $k=2 \sim 8$ 的最小距离和式(2)中的 P 矩阵，为表述方便，此处将 P 矩阵的 k 位二进制列矢量转换成了八进制。

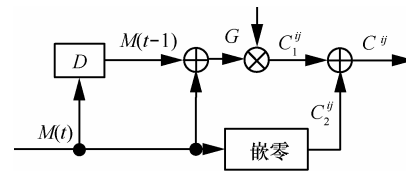


图 1 (2k, k ,1)卷积码编码器

表 1 (2k, k)内嵌码的 P 矩阵和最小距离

信息位(k)	P 矩阵	最小距离
2	[1 2]	2
3	[3 5 6]	3
4	[13 15 16 7]	4
5	[7 23 31 34 16]	4
6	[16 7 43 61 70 34]	4
7	[154 66 33 146 63 131]	4
8	[164 72 35 216 107 243 321 350]	5

3 构造机理分析

(2k, k ,1)卷积码的编码器只有一个延时单位 D ，所以一个信息元矢量对应一个状态，设当前状态 $S_i = \mathbf{M}(t)$ ，前一状态 $S_j = \mathbf{M}(t-1)$ ，其中下标 i, j 与式(4)含义相同，很明显，(2k, k ,1)卷积码共有 2^k 种状态，其中任意 2 个状态之间都可以相互转移，对应于格栅图，有 2^k 条路径汇集或分叉于每一个状态节点，图 2 给出了(6,3,1)卷积码的状态转移，若干个这样的状态转移首尾相连便构成格栅图。

为了揭示(2k, k ,1)卷积码的构造机理，现定义一种状态转移矩阵

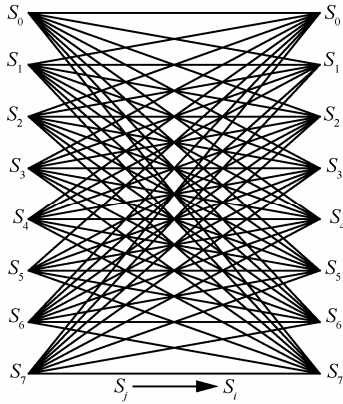


图 2 (6,3,1)卷积码的状态转移

$$\begin{aligned}
 C = C_1 + C_2 &= \begin{bmatrix} C_1^{00} & C_1^{01} & \dots & C_1^{0K} \\ C_1^{10} & C_1^{11} & \dots & C_1^{1K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1^{K0} & C_1^{K1} & \dots & C_1^{KK} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_2^{00} & C_2^{01} & \dots & C_2^{0K} \\ C_2^{10} & C_2^{11} & \dots & C_2^{1K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_2^{K0} & C_2^{K1} & \dots & C_2^{KK} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} C^{00} & C^{01} & \dots & C^{0K} \\ C^{10} & C^{11} & \dots & C^{1K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C^{K0} & C^{K1} & \dots & C^{KK} \end{bmatrix} \quad (5)
 \end{aligned}$$

其中, $K=2^k-1$, C_1^{ij} 、 C_2^{ij} 、 C^{ij} 分别为矩阵 C_1 、 C_2 、 C 的元素, C^{ij} 对应状态 S_j 到状态 S_i 的转移。式(5)囊括了 $(2k,k,1)$ 卷积码的所有状态转移, 构成了整个码字空间。由于式(5)的行与列是按 i, j 排序的, 因此 C 的同一行(或列)的 2^k 个码字既对应相同的 $M(i)$ (或 $M(i-1)$), 也对应格栅图中汇集(或分叉)于同一状态节点的 2^k 条分支路径。该矩阵一共包含 2^{2k} 个元素, 对应格栅图中相邻 2 个时刻所确定的 2^{2k} 条分支路径。笔者针对不同 k 值, 借助计算机编程导出式(5), 提炼出与 $(2k,k,1)$ 卷积码的码字结构和距离特性有关的 4 条性质, 在证明这些性质之前, 先给出几条引理。

引理 1 定义所有 k 位二元矢量 $M=[m_0 \ m_2 \ m_3 \ \dots \ m_{k-1}]^T$ 构成包含 2^k 个元素的自然二进制码集合 $\Phi(k)$, 则集合 $\Phi(k)$ 中的所有元素分别加上集合中的某个相同元素后, 映射为集合自身(不考虑元素的顺序)。

引理 2 取集合 $\Phi(k)$ 中所有元素相同的位, 则其中 0 和 1 的数量各占 2^{k-1} 。

引理 3 $M \in \Phi(k)$, 定义 M 的码重为 $w(M)$, 那么当 M 遍历集合 $\Phi(k)$ 后, $w(M)$ 为奇数和偶数的数量各占 2^{k-1} 。

引理 4 对集合 $\Phi(k)$ 中的所有元素进行 $k-s$ 个相同位置的位删除, 定义不改变原有次序的、缩短到 s 位的新元素为 $M'_i=[m'_{i0} \ m'_{i1} \ m'_{i2} \ \dots \ m'_{i(s-1)}]^T$, 并映射为集合 $\Phi'(k)$, 其中, $0 < s < k$, 则 $\Phi'(k)$ 包含有 2^{k-s} 个 $\Phi(s)$ 。

引理 5 取集合 $\Phi(k_1)$ 的 k_1 位矢量 M_1 , 与集合 $\Phi(k_2)$ 的 k_2 位矢量 M_2 并接为 k_1+k_2 位矢量, 当 M_1 、 M_2 先后遍历集合 $\Phi(k_1)$ 、 $\Phi(k_2)$ 后, 可得到集合 $\Phi(k_1+k_2)$ 。

引理 1~引理 5 可从自然二进制码的码字结构获得, 在此不予证明。

引理 6 码字 D_1 、 D_2 、 $D_3 \in \Phi(k)$, 则码字距离 $d(D_1+D_3, D_2+D_3)=d(D_1, D_2)$ 。

证明 当 D_3 的某一位为 0 时不改变 D_1 、 D_2 的对应位, 为 1 时虽然改变了对应位, 但这种改变对 D_1 、 D_2 是同时进行的, 仍然不会改变码距, 结论得证。

引理 7 常数矢量 $M=[m_0 \ m_1 \ m_2 \ \dots \ m_{k-1}]^T \in \Phi(k)$, $P=[p_{xy}]$ 为域 $GF(2)$ 的 $k \times k$ 常数矩阵, 其中 $x, y=0 \sim k-1$, P 的任何一行(列)不全为 0。当 M_i 遍历 $\Phi(k)$ 时, 定义

$$H_i = P \times M_i + M = [h_{i0} \ h_{i1} \ h_{i2} \ \dots \ h_{i(k-1)}]^T \quad (6)$$

构成集合 $\psi(k)$, 取 $\psi(k)$ 中所有元素相同的位, 则其中 0 与 1 等数量。

证明 设 $H'_i = P \times M_i = [h'_{i0} \ h'_{i1} \ h'_{i2} \ \dots \ h'_{i(k-1)}]^T$, 则 H'_i 的首位

$$\begin{aligned}
 h'_{i0} &= [p_{00} \ p_{01} \ \dots \ p_{0(k-1)}][m_{i0} \ m_{i1} \ m_{i2} \ \dots \ m_{i(k-1)}]^T \\
 &= \sum_{y=0}^{k-1} p_{0y} m_{iy} \quad (7)
 \end{aligned}$$

当系数 $p_{0y}=0$ 时, 相当于删除掉 m_{iy} , 由引理 4 对 M'_i 的定义得

$$h'_{i0} = \sum_{y=0}^{k-1} p_{0y} m_{iy} = \sum_{y=0}^{s-1} m'_{iy} = w(M'_i) \pmod{2} \quad (8)$$

再联合引理 3 和引理 4: i 遍历 $0 \sim 2^k-1$ 后, h'_{i0} 为 0 或 1 的数量是相等的。接下来, 考虑到 M 的首位 m_0 取值为 0 或 1, 由式(6)得

$$h_{i0} = h'_{i0} + m_0 = h'_{i0} \text{ 或 } \overline{h'_{i0}} \quad (9)$$

该式表明, 当 $m_0=1$ 时, 相当于对 $h'_{i0} \sim h'_{i(2^k-1)}$ 同时取反码, 即 0、1 相互转换, 且互换的次数相同, 所以依然不会改变 0 和 1 等数量的事实。 $h_{i1} \sim h_{i(k-1)}$ 同理可证。

性质 1 (2k,k,1)卷积码的状态转移矩阵的所有元素构成集合 $\Phi(2k)$ 。

证明 设式(5)中 C^j 的高 k 位为

$$C_h^{ij} = M(t) + M(t-1) \quad (10)$$

考虑到伽罗华域 $GF(2)$ 运算的封闭性，对于任一 $M(t-1) \in \Phi(k)$ ，总能找到唯一的 $M(t) \in \Phi(k)$ ，使得 $C_h^{ij} \in \Phi(k)$ 为某指定矢量，当 $M(t-1)$ 遍历集合 $\Phi(k)$ 时，由于该矢量经编码后具有相同的校验位 $P \times (M(t) + M(t-1))$ ，由引理 1 可知低 k 位

$$C_l^{ij} = P \times (M(t) + M(t-1)) + M(t-1) \quad (11)$$

将构成集合 $\Phi(k)$ ，再由引理 5 可知，当 C_h^{ij} 遍历集合 $\Phi(k)$ 后，可构成集合 $\Phi(2k)$ 。

性质 2 (2k,k,1)卷积码的状态转移矩阵的任意一行，其距离分布与内嵌码完全一样。

证明 C_1 、 C_2 、 C 中某指定行的 2^k 个元素分别为 $C_1^{i0} \sim C_1^{iK}$ 、 $C_2^{i0} \sim C_2^{iK}$ 、 $C^{i0} \sim C^{iK}$ 。先考察 $C_1^{i0} \sim C_1^{iK}$ ，很明显，这 2^k 个元素具有相同的 $M(t)$ ，而 $M(t-1)$ 遍历集合 $\Phi(k)$ ，由引理 1 可知 $M(t) + M(t-1)$ 构成集合 $\Phi(k)$ ，再根据式(3)可知 $C_1^{i0} \sim C_1^{iK}$ 正好构成了内嵌码的码字集合；再考察 $C_2^{i0} \sim C_2^{iK}$ ，由于这 2^k 个元素具有相同的 $M(t)$ ，则 $C_2^{i0} = C_2^{i1} = \dots = C_2^{iK}$ ，可见 $C^{i0} \sim C^{iK}$ 是由内嵌码的码字集合分别与同一个元素相加后形成的新码集，而引理 6 指出，2 个码字分别加上同一个码字后，其码距并不会发生改变，可见这个新码集的距离分布与内嵌码是完全相同的。

性质 3 (2k,k,1)卷积码状态转移矩阵的任意一行(列)的 2^k 个码字相同的位，0 和 1 等数量。

证明 前面已经证明状态转移矩阵的某行(或列) 2^k 个元素的高 k 位 $C_h^{i_0 0} \sim C_h^{i_0 K}$ (或 $C_h^{0 i_1} \sim C_h^{K i_1}$) 构成了集合 $\Phi(k)$ ，由引理 2 可知结论是成立的。接下来考察某列 2^k 个元素的低 k 位 $C_l^{0 i_1} \sim C_l^{K i_1}$ ，观察

式(11)可知，对 $C_l^{0 i_1} \sim C_l^{K i_1}$ 而言，具有相同的 P 矩阵和 $M(t-1)$ ，而 $M(t) + M(t-1)$ 遍历集合 $\Phi(k)$ ，完全符合式(6)条件，根据引理 7 可知结论也是成立的。最后考察某行 2^k 个元素的低 k 位 $C_l^{i_0 0} \sim C_l^{i_0 K}$ ，对式(11)进行变换得

$$\begin{aligned} C_l^{i_0 i} &= P \times (M(t) + M(t-1)) + M(t-1) \\ &= (P + I)M(t-1) + P \times M(t) \end{aligned} \quad (12)$$

对 $C_l^{i_0 0} \sim C_l^{i_0 K}$ 而言， P 、 I 、 $M(t)$ 是相同的，所以在式(12)中 $P \times M(t)$ 、 $(P + I)$ 也相同，又由于 $M(t-1)$ 遍历集合 $\Phi(k)$ ，所以该式仍然符合式(6)条件，结论同样成立。

性质 4 (2k,k,1)卷积码状态转移矩阵的任意一行(列)的 2^k 个码字的码重和等于 $2^k \times k$ 。

证明 由性质 3 可得出一个更弱的结论，即式(5)的其中一行(列)的 2^k 个码字中，0 和 1 必然等数量，那么这 2^k 个码字的码重和为

$$w = \sum_{i=0}^{2^k-1} w(C^{ij}) = \sum_{j=0}^{2^k-1} w(C^{ij}) = \frac{2k \times 2^k}{2} = k \times 2^k \quad (13)$$

以上 4 条性质中，性质 1 表明，状态转移矩阵中没有相同元素，那么格栅图中相邻 2 个时刻(即图 2)的 2^k 条分支路径就不会存在相同码字，避免了在计算自由距离时局部出现码距为 0 的情况，有利于防止(2k,k,1)卷积码的距离特性变差；性质 2 表明，就任何单个状态节点而言，汇集于该节点的 2^k 条分支路径的距离分布与内嵌码完全相同，可见内嵌码越好，越有利于构造好的(2k,k,1)卷积码，表 1 的选择也正是基于此；性质 3 和性质 4 则意味着就整个格栅图而言，(2k,k,1)卷积码的码字结构和重量分布具有高度的均衡性，为获得好的码型创造了有利的基础条件。为了进一步分析(2k,k,1)卷积码的构造机理，不妨以(6,3,1)卷积码为例，首先假设没有嵌零及叠加过程，直接将 C_1 作为其编码输出，按式(3)计算得到

$$C_1 = \begin{bmatrix} 000000 & 001110 & 010101 & 011011 & 100011 & 101101 & 110110 & 111000 \\ 001110 & 000000 & 011011 & 010101 & 101101 & 100011 & 111000 & 110110 \\ 010101 & 011011 & 000000 & 001110 & 110110 & 111000 & 100011 & 101101 \\ 011011 & 010101 & 001110 & 000000 & 111000 & 110110 & 101101 & 100011 \\ 100011 & 101101 & 110110 & 111000 & 000000 & 001110 & 010101 & 011011 \\ 101101 & 100011 & 111000 & 110110 & 001110 & 000000 & 011011 & 010101 \\ 110110 & 111000 & 100011 & 101101 & 010101 & 011011 & 000000 & 001110 \\ 111000 & 110110 & 101101 & 100011 & 011011 & 010101 & 001110 & 000000 \end{bmatrix} \quad (14)$$

容易验证该式满足性质 2~4, 但是, 其每一行(列)的码字构成与内嵌码完全一样, 每个码字在矩阵中重复出现了 $2^3=8$ 次, 这也意味着图 2 中存在大量具有相同码字的分支路径, 在计算自由

距离时会频繁出现码距为 0 的情况, 必将在很大程度上影响其距离特性, 可见虽然 C_1 已经完成了带有记忆的编码, 却不能获得好码, 现按式(4)计算式(5)可得到:

$$C = \begin{bmatrix} 000000 & 001110 & 010101 & 011011 & 100011 & 101101 & 110110 & 111000 \\ 001111 & 000001 & 011010 & 010100 & 101100 & 100010 & 111001 & 110111 \\ 010111 & 011001 & 000010 & 001100 & 110100 & 111010 & 100001 & 101111 \\ 011000 & 010110 & 001101 & 000011 & 111011 & 110101 & 101110 & 100000 \\ 100111 & 101001 & 110010 & 111100 & 000100 & 001010 & 010001 & 011111 \\ 101000 & 100110 & 111101 & 110011 & 001011 & 000101 & 011110 & 010000 \\ 110000 & 111110 & 100101 & 101011 & 010011 & 011101 & 000110 & 001000 \\ 111111 & 110001 & 101010 & 100100 & 011100 & 010010 & 001001 & 000111 \end{bmatrix} \quad (15)$$

该式将码字空间扩展到 $\Phi(6)$, 获得了码字的多样性, 避免了图 2 出现相同码字, 在获得性质 1 的同时, 依然持有性质 2~4, 这也正是图 1 中嵌套及叠加的作用之所在, 是构造 $(2k, k, 1)$ 卷积码的关键环节。

在卷积码的各种分析手段中, 转移函数及状态流图从不同角度对编码器的输入输出关系进行了描述, 但转移函数更侧重于体现卷积码编码结构, 而状态流图则可直接获取任一状态转移所对应的编码输出。很明显, 状态转移矩阵的作用更接近于状态流图, 而非转移函数, 但状态转移矩阵比状态流图更加直观简洁地呈现了各个状态之间的转移情况及对应的编码输出, 且可以以此为基础, 结合代数方法对卷积码的编码机理和距离特性进行更为完整的分析, 为获得好的码型提供了一定的理论依据, 这一点已从性质 1~4 的证明中得到充分体现。

当信道转移概率 p 很小时, 文献[10]详细推导了 (n, k, l) 卷积码 viterbi 译码的误比特率为

$$P_b(E) \approx \frac{B_{d_f}}{k} 2^{d_f} p^{d_f/2} \quad (16)$$

其中, d_f 为自由距离, B_{d_f} 为所有重量为 d_f 的码字序列所对应的信息序列的重量之和, 该式具有通用性, 同样适用于本文所提出的 $(2k, k, 1)$ 卷积码。进一步分析式(16)可知, 当 d_f 与 B_{d_f} 一样时, $(2k, k, 1)$ 卷积码的误比特率仅为 $(2, 1, k)$ 卷积码的 $1/k$, 换言之, k 值的增长本身就对误码特性的改善存有贡献, 这也正是研究 $(2k, k, 1)$ 卷积码的原因之所在。

4 仿真分析

文献[11]针对传统 $(2, 1, k)$ 卷积码提出了一种 viterbi 算法的矩阵化实现方案, 矩阵化的优点是可设计出单一结构但却具有并行处理能力^[12]的译码器。 $(2k, k, 1)$ 和 $(2, 1, k)$ 卷积码的状态数均为 2^k , 二者均须完成 2^k 次加比选以及幸存路径的保存和更新操作。另一方面, 由于汇集于 $(2k, k, 1)$ 和 $(2, 1, k)$ 卷积码的每个状态节点的分支路径数分别为 2^k 条和 2 条, 因此实施加比选时分别是 2^k 选 1 和 2 选 1, 所以采用矩阵化方案完成 $(2k, k, 1)$ 卷积码的 viterbi 并行译码显得更为方便有效。本文以文献[11]为基础, 在 BPSK 调制方式及高斯信道环境下完成了 $(2k, k, 1)$ 卷积码 viterbi 矩阵译码器的设计, 仿真研究采用双精度数据类型计算路径度量, 幸存路径的存储深度 $\tau=10k$, 在 2 000~10 000 个错误时终止仿真。

为了监测译码过程, 可用矩阵示波器对幸存路径存储器的存储内容进行观察, 图 3 给出了 $(8, 4, 1)$ 卷积码 $\tau=40$ 时的截图实例, 图中黑白块分别表示 0 或 1, 可以看出, 随着存储深度的增加, 各个状态节点所保存的信息比特逐渐趋于相同, 表征了格栅图中各个状态所对应的幸存路径将随着存储深度的增加逐渐汇集在一起, 对比图 3(a)和图 3(b)可知, 如果信道条件恶化, 汇集情况也会随之变差, 可见这种方法可作为实时评估信道条件好坏的重要手段。

以表 1 为内嵌码可构造 7 种 $(2k, k, 1)$ 卷积码, 图 4 给出了对应的信噪比与误比特率关系曲线, 由该图可知, 与不编码相比, 在 10^{-5} 处最多可获得约 6 dB 的编码增益。另外, 随着 k 值的增加, $(2k, k, 1)$ 卷积

码的增益增量逐渐减少，可见其具有和常规卷积码一样的收敛特性。

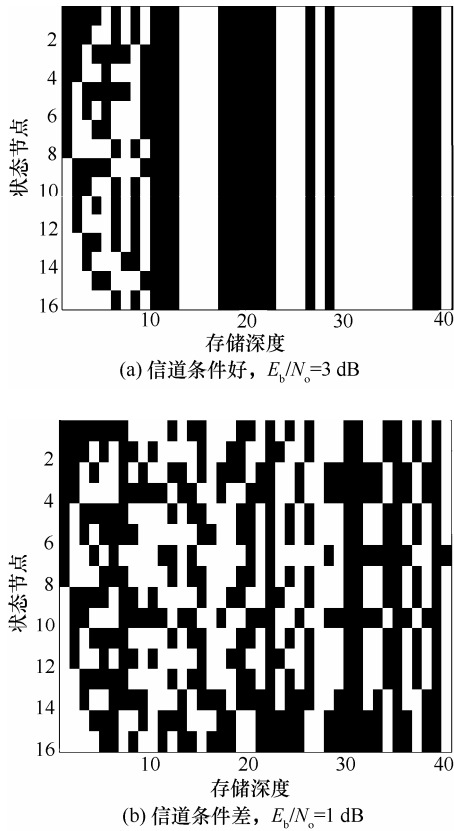


图 3 (8,4,1)卷积码路径存储矩阵

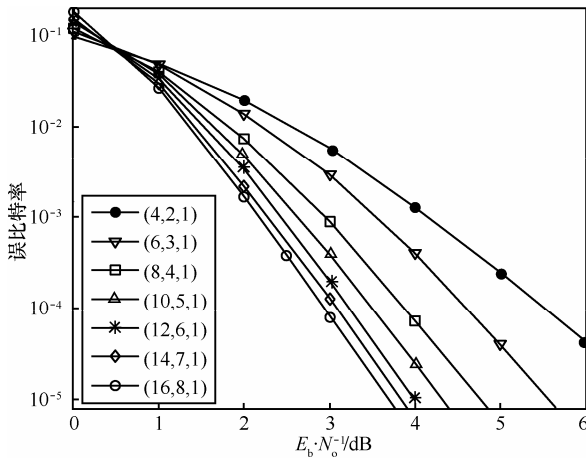


图 4 (2k,k,1) 误码性能

当 $k=l$ 时, $(2k,k,1)$ 和 $(2,1,l)$ 卷积码具有一样的记忆长度和状态数,采用 viterbi 译码时,加比选操作的次数和幸存路径存储器的规模相同,译码复杂度大体相当,可比性较强。本文从文献[10]选取了具有最优距离特性的 $(2,1,l)$ 卷积码,仿真给出 $k=l=2\sim 6$ 时二者信噪比与误比特率关系曲线的对比,如图 5 所

示。可以看出, $k=l=4, 5, 6$ 时,在误比特率 10^{-5} 处, $(2k,k,1)$ 卷积码比 $(2,1,l)$ 卷积码多出了 0.2~0.5 dB 不等的增益,但 $k=2, 3$ 时反而更差,其主要原因在于:其一, k 较小时,内嵌码的汉明距过小, $(2k,k,1)$ 卷积码不能获得比 $(2,1,l)$ 卷积码更优的自由距离;其二,由式(16)可以看出,就误码特性的改善效果而言,小 k 值显然是不如大 k 值。图 5 表明,在实际应用中,若对纠错和复杂度的要求适中, $(8,4,1)$ 、 $(10,5,1)$ 、 $(12,6,1)$ 3 款卷积码不失为更好的选择。

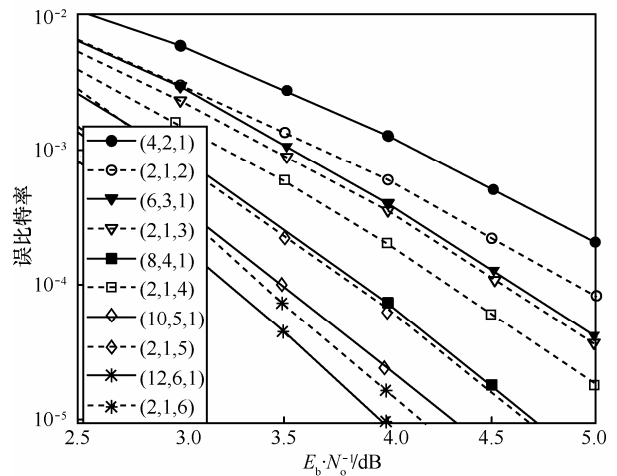


图 5 (2k,k,1)和(2,1,l)误码性能比较

就编码而言, $(2k,k,1)$ 卷积码比 $(2,1,l)$ 卷积码更为复杂,但是,卷积码的计算量主要集中在 viterbi 译码器上,译码复杂度才是衡量二者优劣的关键。事实上,就单个状态节点的加比选而言, $(2k,k,1)$ 卷积码需长度为 $2k$ 的相关运算方可得到分支度量,并完成 2^k 次路径度量的累加,以及 2^k 选 1 的操作。而 $(2,1,l)$ 卷积码则只需长度为 2 的相关运算,以及 2 次路径度量的累加和 2 选 1 的操作, $(2k,k,1)$ 似乎更为复杂。然而, $(2k,k,1)$ 在一次加比选中处理的是 k bit 信息,但 $(2,1,l)$ 却只能处理 1 bit,总体上看前者的运算效率并不比后者差。更为重要的是, $(2k,k,1)$ 卷积码译码器的其他所有环节都是按 k bit 处理的。换言之,对于同样 k bit 信息, $(2k,k,1)$ 卷积码只需 1 次加比选,以及路径度量、幸存路径的保存与更新,即可批量完成其译码,但 $(2,1,l)$ 卷积码却需要 k 次独立的处理才能完成,可见 $(2k,k,1)$ 的译码效率是更高的。为了验证这一点,笔者在相同的计算机运行环境下,采用相同的编程和建模方案,针对 $k=l=2\sim 8$ 等码长,分别就 2 种码型进行了仿真,

并统计了程序运行 10 min 后所计算的信息比特数, 如表 2 所示, 可以看出, $(2k, k, 1)$ 卷积码的译码速度的确更快。

表 2 2 种卷积码的计算速度比较

$k=l$	$(2k, k, 1)$	$(2, 1, l)$
2	1.8×10^7	4.8×10^6
3	1.7×10^7	4.9×10^6
4	1.6×10^7	4.2×10^6
5	1.1×10^7	3.8×10^6
6	6.4×10^6	2.9×10^6
7	5.6×10^6	2.6×10^6
8	2.2×10^6	1.3×10^6

5 结束语

本文结合 $(2, 1, 1)$ 卷积码与 $(2k, k)$ 双环循环码, 构造了一类新型 $(2k, k, 1)$ 卷积码, 获得了一种增大卷积码记忆长度的新途径。为了系统分析与揭示该码类的距离特性与构造机理, 文中定义了一种状态转移矩阵, 并结合格栅图, 利用代数方法完成了该矩阵 4 条性质的证明, 发现其码字结构的均衡性与多样性俱佳。仿真实验给出了部分码型的信噪比与误比特曲线, 进一步展示了该码类在译码速度和纠错能力两方面所具有的优势。 $(2k, k, 1)$ 卷积码将双环循环码植入到 $(2, 1, 1)$ 卷积码的编码结构中, 具有和乘积码、turbo 码等传统级联码^[13]相类似的短码构造长码的特征。但二者的构造机制却又存在明显区别, 主要体现在 $(2k, k, 1)$ 卷积码不是靠内外码的级联, 不使用交织器, 也不会出现级联码那样的码率损失。 $(2k, k, 1)$ 卷积码的研究意义在于提供了一种短码构造长码的新思路和新途径, 尚存有较为广阔的拓展研究空间, 笔者将以此为基础, 就如何构造 $(2k, k, l)$ 卷积码展开进一步的研究工作, 以实现卷积码信息组长度和约束长度的双重增长。

参考文献:

[1] ROBINSON J, BERNSTEIN A. A class of binary recurrent codes with limited error propagation[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1967, 13(1): 106-113.

[2] MASSEY J, COSTILLO D. Nonsystematic convolutional codes for sequential decoding in space applications[J]. IEEE Transactions on Communication Theory, 1971, 19(5): 806-813.

[3] BRIAN C. Complementary punctured-pair convolutional codes for digital audio broadcasting[J]. IEEE Transactions on Communication

Theory, 2000, 48(11): 1829-1839.

[4] 林舒. 差错控制编码[M]. 北京: 机械工业出版社, 2007. 384-394.

LIN S. Error Control Coding[M]. Beijing: China Machine Press, 2007, 384-394.

[5] BERROU C, GLAVIEUX A. Near optimum error correcting coding and decoding: turbo-codes[J]. IEEE Transactions on Communication Theory, 1996, 44(10): 1261-1271.

[6] TANNER R M, SRIDHARA D, et al. LDPC block and convolutional codes based on circulant matrices[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2004, 50(12): 2966-2984.

[7] KATSITOTIS A, RIZOMILITOTIS P, et al. New constructions of high-performance low-complexity convolutional codes[J]. IEEE Transactions on Communication Theory, 2010, 58(7): 1950-1961.

[8] PUSANE A E, SMARANDACHE R, et al. Deriving good LDPC convolutional codes from LDPC block codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2011, 57(2): 835-857.

[9] 柏鹏, 张凤鸣, 李俊涛. 一种新的卷积码自由距离计算方法[J]. 弹箭与制导学报, 2005, 25(2): 415-417.

BAI P, ZHANG F M, LI J T. A new algorithm for computing free distances of convolutional codes[J]. Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance, 2005, 25(2): 415-417.

[10] 王新梅. 纠错码—原理与方法[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2001.

WANG X M. Error Correcting Codes-Principle and Method[M]. Xi'an: Xidian University Press, 2001.

[11] 彭万权, 伍小兵, 张承畅. 一种维特比译码器的矩阵实现方案[J]. 电路与系统学报, 2012, 17(3): 115-120.

PENG W Q, WU X B, ZHANG C C. A matrix implementation scheme of viterbi decoder[J]. Journal of Circuits and Systems, 2012, 17(3): 115-120.

[12] SUN F, ZHANG T. Low-power state-parallel relaxed adaptive viterbi decoder[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 2007, 54(5): 1060-1068.

[13] 彭万权, 冯文江. 乘积码基于相关运算的迭代译码[J]. 电路与系统学报, 2006, 11(4): 26-30.

PENG W Q, FENG W J. A new iterative decoding for product codes with correlation operation[J]. Journal of Circuits and Systems, 2006, 11(4): 26-30.

作者简介:



张承畅 (1975-), 男, 湖北利川人, 博士, 主要研究方向为纠错编码、软件无线电等。

彭万权 (1974-), 男, 重庆垫江人, 重庆工程职业技术学院副教授, 主要研究方向为纠错码的算法。

韦铂 (1990-), 男, 湖北荆州人, 重庆大学硕士生, 主要研究方向为纠错编码与信号处理。